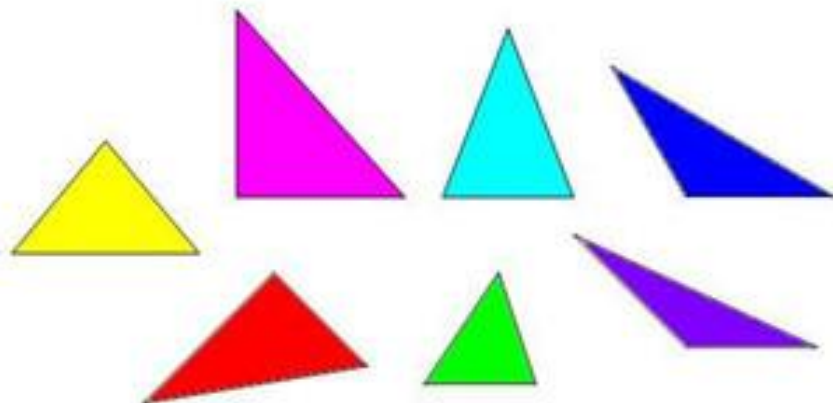


SUB14 - Problema 3

Pontos e triângulos



O Luís marcou 10 pontos de modo que não ficassem três sobre uma mesma reta. Em seguida numerou-os de um a 10. Quantos triângulos existem com vértices nesses pontos, em que a soma dos números é ímpar?

O Sub14 reserva-se o direito de editar as resoluções de participantes publicadas, exclusivamente no sentido de retificar pormenores de linguagem ou de correção matemática, respeitando o processo de resolução apresentado.

Catarina Macedo,

EB 2,3 de Santiago Maior, Beja

Sei que tenho que somar 3 números diferentes de 1 a 10, que somados terão que dar um nº ímpar e também sei que a única maneira de isso acontecer é somar: $n^{\circ} \text{par} + n^{\circ} \text{par} + n^{\circ} \text{ímpar}$ ou $n^{\circ} \text{ímpar} + n^{\circ} \text{ímpar} + n^{\circ} \text{ímpar}$

Então, como o Luís marcou 10 pontos, terei que descobrir quantas associações de números diferentes de 1 a 10 existem.

De 1 a 10 há:

Números pares: 2,4,6,8,10

Números ímpares: 1,3,5,7,9

Para saber quantas associações de 2 números pares existem no conjunto dos números pares {2, 4, 6, 8, 10} fiz o seguinte esquema:

2, 4, 6, 8, 10	2, 4, 6, 8, 10	2, 4, 6, 8, 10	2, 4, 6, 8, 10
2, 4, 6, 8, 10	2, 4, 6, 8, 10	2, 4, 6, 8, 10	
2, 4, 6, 8, 10	2, 4, 6, 8, 10		
2, 4, 6, 8, 10			

Agora multipliquei o nº de associações de 2 números pares (10) pelo nº de números ímpares (5) que deu $10 \times 5 = 50$.

Logo, sabendo que $n^{\circ} \text{par} + n^{\circ} \text{par} + n^{\circ} \text{ímpar} = n^{\circ} \text{ímpar}$ já esgotei todas as hipóteses possíveis que são 50.

De seguida vou saber quantas associações de 3 números diferentes ímpares existem no conjunto dos números ímpares. Vou apresentá-los na seguinte tabela:

1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9
1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	
1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	

Existem 10 associações de 3 números ímpares diferentes de 1 a 10 no conjunto de números ímpares. Se existem 50 associações de 2 números pares com um número ímpar e 10 associações de 3 números ímpares, então existem 60 associações de 3 números diferentes de 1 a 10 que somados dão um número ímpar.

R.: Existem **60** triângulos com vértices nesses pontos em que a soma dos números é ímpar.

Rui Miguel da Fonseca,

EBI/JI de Montenegro

Número ímpar + Número ímpar + Número ímpar = Número ímpar

Número par + Número par + Número ímpar = Número ímpar

Agora vou ver quais são e quantos são os números pares e ímpares:

Números ímpares = {1, 3, 5, 7, 9}

Nº de números ímpares = 5

Números pares = {2, 4, 6, 8, 10}

Nº de números pares = 5

Agora, o que tenho de fazer é ver quantos triângulos dá para fazer com cada uma das fórmulas acima referidas.

Começo por calcular o nº de triângulos da fórmula com os três números ímpares.

Para fazer tal coisa tenho de multiplicar o nº de números ímpares que estão entre o 1 e o 10 três vezes da seguinte forma:

$$5 \times 4 \times 3$$

Porquê $5 \times 4 \times 3$ e não 5^3 ?

Para evitar que o mesmo número se repita duas ou mais vezes.

Então seguindo esta lógica posso escolher um triângulo da seguinte forma:

- Número ímpar (tenho 5 possibilidades): por exemplo, escolho o 5.
- Depois, próximo número, número ímpar (tenho 4 possibilidades, pois não posso voltar a escolher o 5): por exemplo, escolho o 7.
- Depois, próximo número, número ímpar (tenho 3 possibilidades, pois não posso voltar a escolher o 5, nem o 7): por exemplo, escolho o 3.

E assim está escolhido um possível triângulo.

Depois disso, divido por 6. Porquê?

Porque usando esta fórmula há 6 formas de representar o mesmo triângulo.

Exemplo:

Triângulo (5; 7; 3):

Formas de representar:

- 5; 7; 3
- 5; 3; 7
- 3; 7; 5
- 3; 5; 7
- 7; 5; 3
- 7; 3; 5

6 formas de representar

Então, agora faz-se a conta.

$$5 \times 4 \times 3 \div 6 = 60 \div 6 = 10$$

Nº de possibilidades com a 1ª fórmula: 10

Agora, vou calcular o nº de triângulos da outra fórmula.

Para isso, vou fazer:

$$5_{(n^{\circ} \text{ de números pares})} \times 4_{(n^{\circ} \text{ de números pares} - 1)} \times 5_{(n^{\circ} \text{ de números ímpares})}$$

Depois vou dividir por 2 porque só há duas formas de representar o mesmo triângulo, seguindo a fórmula:

Exemplo:

Triângulo (4; 8; 1)

Formas de representar:

- 4; 8; 1
- 8; 4; 1

2 formas de representar

Então, agora faz-se a conta.

$$5 \times 4 \times 5 \div 2 = 100 \div 2 = 50$$

Nº de possibilidades com a 2ª fórmula: 50

No final de tudo, só se tem de somar o Nº de possibilidades da 1ª fórmula com o

Nº de possibilidades da 2ª fórmula:

$$10 + 50 = 60$$

Resposta: Há 60 triângulos

David Ramires,

EB 2,3 de Monte Gordo

Pensei numa figura com 10 lados – um decágono. Numerei os lados do decágono de 1 a 10 e pensei em cada um dos números como um vértice do triângulo. Para que a soma dos vértices seja um número ímpar existem duas hipóteses: os 3 vértices estão nos pontos com números ímpares ou 2 vértices são pares e o terceiro é ímpar. Só estes dois pressupostos permitem que a soma dos 3 vértices seja um número ímpar. (A soma de 3 números pares é igual a um número par e a soma de 2 números ímpares e um par também é igual a um número par).

Experimentei a primeira hipótese (3 pontos ímpares):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x		x		x					
x		x				x			
x		x						x	
		x		x		x			
		x		x				x	
				x		x		x	

Existem 10 triângulos com os vértices nos pontos ímpares.

Em seguida experimentei a segunda hipótese (2 pontos pares e um ímpar):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	x		x						
	x	x	x						
	x		x	x					
	x		x			x			
	x		x					x	

Existem 10 possibilidades de combinações de números pares entre si (2,4 – 2,6 – 2,8 – 2,10 – 4,6 – 4,8 – 4,10 – 6,8 – 6,10 e 8,10). Fiz apenas com os números 2 e 4 e cada um dos números ímpares – obtive 5 resultados. Como existem 10 combinações possíveis de números pares, existirão 50 resultados.

R: Existem 60 triângulos com a soma dos vértices ímpar – 10 triângulos com os 3 vértices ímpares e 50 triângulos com dois vértices pares e um ímpar.

Beatriz Alves,

EB 2,3 D. Martinho Castelo Branco, Portimão

“O Luís marcou 10 pontos de modo que não ficassem três sobre uma mesma reta. Em seguida numerou-os de um a 10.”

Como o Luís marcou os pontos de modo a que não ficassem três sobre uma mesma reta, pode-se construir um triângulo com quaisquer três pontos.

“Quantos triângulos existem com vértices nesses pontos, em que a soma dos números é ímpar?”

Para a soma de três números ser ímpar, os vértices do triângulo têm de ser:

Ímpar + Ímpar + Ímpar ou **Ímpar + Par + Ímpar**

Deste modo decidi agrupar conjuntos de três números ímpares e conjuntos de dois números ímpares e um par (de 1 a 10).

1-3-5	1-7-9
1-3-7	3-5-7
1-3-9	3-5-9
1-5-7	3-7-9
1-5-9	5-7-9



Nesta situação, com os vértices apenas com números ímpares, podemos construir 10 triângulos diferentes.

1-2-4	1-4-8
1-2-6	1-4-10
1-2-8	1-6-8
1-2-10	1-6-10
1-4-6	1-8-10

3-2-4	3-4-8
3-2-6	3-4-10
3-2-8	3-6-8
3-2-10	3-6-10
3-4-6	3-8-10

9-2-4	9-4-8
9-2-6	9-4-10
9-2-8	9-6-8
9-2-10	9-6-10
9-4-6	9-8-10

5-2-4	5-4-8
5-2-6	5-4-10
5-2-8	5-6-8
5-2-10	5-6-10
5-4-6	5-8-10

7-2-4	7-4-8
7-2-6	7-4-10
7-2-8	7-6-8
7-2-10	7-6-10
7-4-6	7-8-10

Nesta situação, com os vértices em que dois deles são números ímpares e o outro é número par, podemos construir mais 50 triângulos.

Resposta: Ao todo, existem 60 triângulos com vértices nesses pontos em que a soma dos números é ímpar 😊.

Maria Sofia Canas,

Agrupamento de Escolas do Bonfim, Portalegre

Ímpar	Par	Par	Soma
1	2	4	7
1	2	6	9
1	2	8	11
1	2	10	13
1	4	6	11
1	4	8	13
1	4	10	15
1	6	8	15
1	6	10	17
1	8	10	19
3	2	4	9
3	2	6	11
3	2	8	13
3	2	10	15
3	4	6	13
3	4	8	15
3	4	10	17
3	6	8	17
3	6	10	19
3	8	10	21
5	2	4	11
5	2	6	13
5	2	8	15
5	2	10	17
5	4	6	15
5	4	8	17
5	4	10	19
5	6	8	19
5	6	10	21
5	8	10	23
7	2	4	13
7	2	6	15
7	2	8	17
7	2	10	19
7	4	6	17
7	4	8	19
7	4	10	21
7	6	8	21
7	6	10	23
7	8	10	25
9	2	4	15
9	2	6	17
9	2	8	19
9	2	10	21
9	4	6	19
9	4	8	21
9	4	10	23
9	6	8	23
9	6	10	25
9	8	10	27
Número de possibilidades			50

Resolução do problema nº 3

Para resolver este problema comecei por identificar as possibilidades para que a soma de três números seja ímpar. Elas são:

- Ímpar + Par + Par (tabela à esquerda)
- Ímpar + Ímpar + Ímpar (tabela abaixo)

Depois identifiquei os números ímpares de 1 a 10 que são 1, 3, 5, 7, 9 e os pares de 1 a 10 que são 2, 4, 6, 8 e 10. Construí as sequências representadas na tabela, tendo o cuidado de não repetir os números. Para a segunda fórmula executei o mesmo processo, mas em vez de utilizar números pares apenas utilizei números ímpares.

Com este processo conclui que podem existir 60 triângulos em que a soma dos vértices dá um número ímpar.



Ímpar	Ímpar	Ímpar	Soma
1	3	5	9
1	3	7	11
1	3	9	13
1	5	7	13
1	5	9	15
1	7	9	17
3	5	7	15
3	5	9	17
3	7	9	19
5	7	9	21
Número de possibilidades			10

António Luís,

EB 2,3 Dr. António João Eusébio, Olhão

Número de triângulos

60

Número 1	Número 2	Número 3	Soma	O resultado da soma é ímpar?	...	...	...	...	...
1	2	3	6	Não, da soma resulta um número par	...	...	...	...	...
1	2	4	7	SIM	4	5	6	15	SIM
1	2	5	8	Não, da soma resulta um número par	4	5	7	16	Não, da soma resulta um número par
1	2	6	9	SIM	4	5	8	17	SIM
1	2	7	10	Não, da soma resulta um número par	4	5	9	18	Não, da soma resulta um número par
1	2	8	11	SIM	4	5	10	19	SIM
1	2	9	12	Não, da soma resulta um número par	4	6	7	17	SIM
1	2	10	13	SIM	4	6	8	18	Não, da soma resulta um número par
1	3	4	8	Não, da soma resulta um número par	4	6	9	19	SIM
1	3	5	9	SIM	4	6	10	20	Não, da soma resulta um número par
1	3	6	10	Não, da soma resulta um número par	4	7	8	19	SIM
1	3	7	11	SIM	4	7	9	20	Não, da soma resulta um número par
1	3	8	12	Não, da soma resulta um número par	4	7	10	21	SIM
1	3	9	13	SIM	4	8	9	21	SIM
1	3	10	14	Não, da soma resulta um número par	4	8	10	22	Não, da soma resulta um número par
1	4	5	10	Não, da soma resulta um número par	4	9	10	23	SIM
1	4	6	11	SIM	5	6	7	18	Não, da soma resulta um número par
1	4	7	12	Não, da soma resulta um número par	5	6	8	19	SIM
1	4	8	13	SIM	5	6	9	20	Não, da soma resulta um número par
1	4	9	14	Não, da soma resulta um número par	5	6	10	21	SIM
1	4	10	15	SIM	5	7	8	20	Não, da soma resulta um número par
1	5	6	12	Não, da soma resulta um número par	5	7	9	21	SIM
1	5	7	13	SIM	5	7	10	22	Não, da soma resulta um número par
1	5	8	14	Não, da soma resulta um número par	5	8	9	22	Não, da soma resulta um número par
1	5	9	15	SIM	5	8	10	23	SIM
1	5	10	16	Não, da soma resulta um número par	5	9	10	24	Não, da soma resulta um número par
1	6	7	14	Não, da soma resulta um número par	6	7	8	21	SIM
1	6	8	15	SIM	6	7	9	22	Não, da soma resulta um número par
					6	7	10	23	SIM
					6	8	9	23	SIM
					6	9	10	25	SIM
					7	8	9	24	Não, da soma resulta um número par
					7	8	10	25	SIM
					7	9	10	26	Não, da soma resulta um número par
					8	9	10	27	SIM

Constança Castro, Ana Carolina Rodrigues e Milene Silva

Colégio Internacional de Vilamoura, Loulé

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Soma	Impar=1
1	1	1								6	
1	1		1							7	1
1	1			1						8	
1	1				1					9	1
1	1					1				10	
1	1						1			11	1
1	1							1		12	
1	1								1	13	1
1		1	1							8	
1		1		1						9	1
1		1			1					10	
1		1				1				11	1
1		1					1			12	
1		1						1		13	1
1			1	1						10	
1			1		1					11	1
1			1					1		14	
1				1	1					10	
1				1		1				11	1
1				1			1			14	
1				1				1		15	1
1				1					1	16	
1					1	1				14	

1				1	1			15	1
1				1		1		16	
1				1			1	17	1
1					1	1		16	
1				1		1		17	1
1					1		1	18	
1					1	1		18	
1						1	1	19	1
1						1	1	20	
1							1	21	1
1							1	22	
1							1	23	1
1							1	24	
1							1	25	1
1							1	26	
1							1	27	1
1							1	28	
1							1	29	1
1							1	30	
1							1	31	1
1							1	32	
1							1	33	1
1							1	34	
1							1	35	1
1							1	36	
1							1	37	1
1							1	38	
1							1	39	1
1							1	40	
1							1	41	1
1							1	42	
1							1	43	1
1							1	44	
1							1	45	1
1							1	46	
1							1	47	1
1							1	48	
1							1	49	1
1							1	50	
1							1	51	1
1							1	52	
1							1	53	1
1							1	54	
1							1	55	1
1							1	56	
1							1	57	1
1							1	58	
1							1	59	1
1							1	60	

1				1			1	17	1
1				1			1	18	
1				1		1	1	17	1
1					1	1		18	
1					1		1	19	1
1					1	1	1	19	1
1					1		1	20	
1					1	1	1	21	1
1					1		1	22	
1					1	1	1	23	1
1					1		1	24	
1					1	1	1	25	1
1					1		1	26	
1					1	1	1	27	1
1					1		1	28	
1					1	1	1	29	1
1					1		1	30	
1					1	1	1	31	1
1					1		1	32	
1					1	1	1	33	1
1					1		1	34	
1					1	1	1	35	1
1					1		1	36	
1					1	1	1	37	1
1					1		1	38	
1					1	1	1	39	1
1					1		1	40	
1					1	1	1	41	1
1					1		1	42	
1					1	1	1	43	1
1					1		1	44	
1					1	1	1	45	1
1					1		1	46	
1					1	1	1	47	1
1					1		1	48	
1					1	1	1	49	1
1					1		1	50	
1					1	1	1	51	1
1					1		1	52	
1					1	1	1	53	1
1					1		1	54	
1					1	1	1	55	1
1					1		1	56	
1					1	1	1	57	1
1					1		1	58	
1					1	1	1	59	1
1					1		1	60	

			1	1		1				16	
			1	1			1			17	1
			1	1				1		18	
			1	1					1	19	1
			1		1	1				17	1
			1		1		1			18	
			1		1			1		19	1
			1		1				1	20	
			1			1	1			19	1
			1			1		1		20	
			1				1		1	21	1
			1				1	1		21	1
			1				1		1	22	
			1					1	1	23	1
				1	1	1				18	
				1	1		1			19	1
				1	1			1		20	
				1	1				1	21	1
				1		1	1			20	
				1		1		1		21	1
				1		1	1			22	
				1		1		1		23	1
				1		1			1	24	
				1	1	1				21	1
				1	1		1			22	
				1	1			1		23	1
				1		1	1			23	1
				1		1		1		24	
				1			1	1		25	1
				1	1	1				24	
				1	1		1			25	1
				1		1	1	1		26	
				1		1	1	1		27	1

Jéssica Melo, Mariana Alves e Inês Nascimento

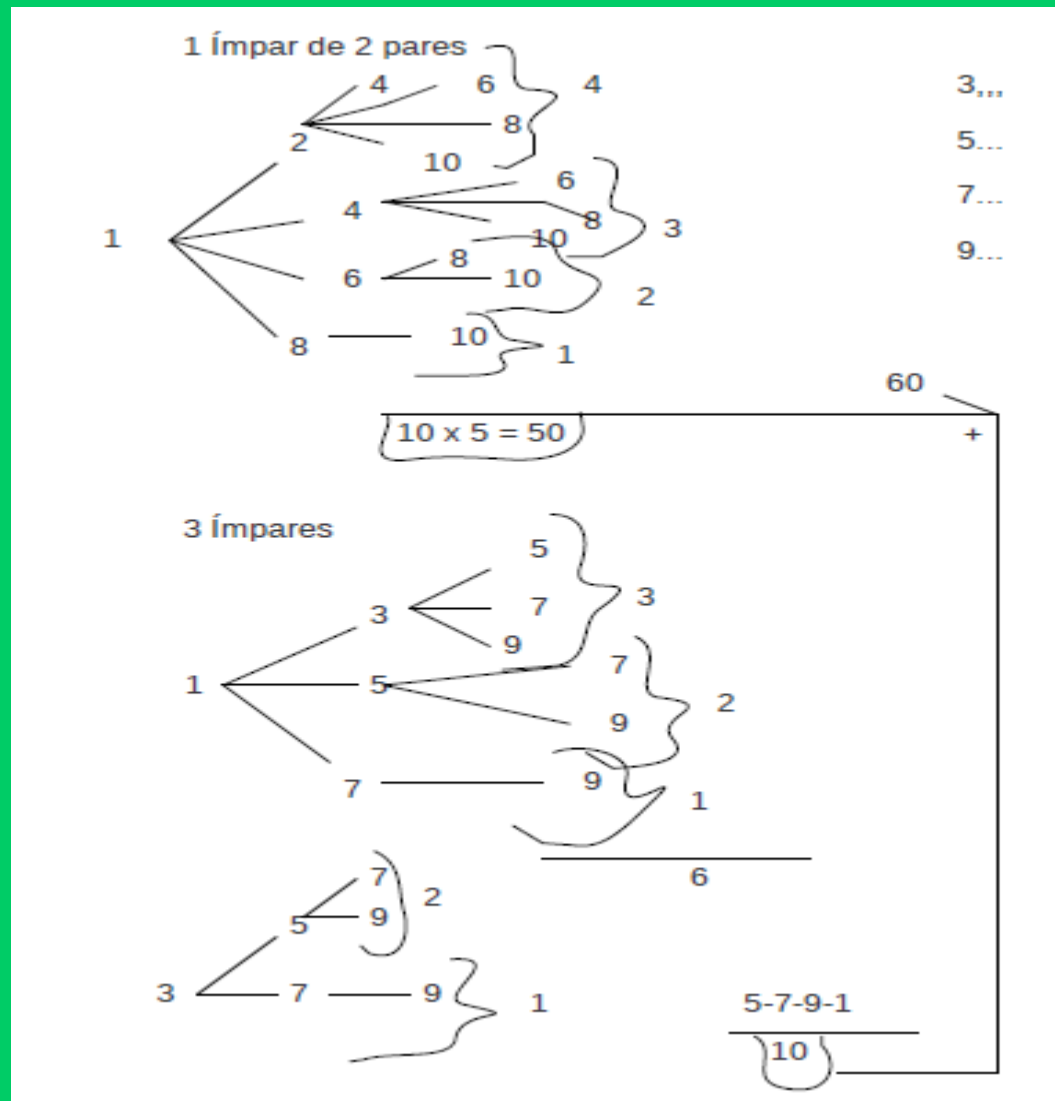
EBI/JI José Carlos da Maia, Olhão

1+2+6=9	1+3+7=11	1+4+8=13	1+5+9=15	1+6+10=17						
1+2+7=10	1+3+8=12	1+4+9=14	1+5+10=16							
1+2+8=11	1+3+9=13	1+4+10=15								
1+2+9=12	1+3+10=14									
1+2+10=13										
2 -										
2+3+4=9	2+4+5=11	2+5+6=13	2+6+7=15	2+7+8=17	2+8+9=19	2+9+10=21				
2+3+5=10	2+4+6=12	2+5+7=14	2+6+8=16	2+7+9=18	2+8+10=20					
2+3+6=11	2+4+7=13	2+5+8=15	2+6+9=17	2+7+10=19						
2+3+7=12	2+4+8=14	2+5+9=16	2+6+10=18							
2+3+8=13	2+4+9=15	2+5+10=17								
2+3+9=14	2+4+10=16									
2+3+10=15										
3 -										
3+4+5=12	3+5+6=14	3+6+7=16	3+7+8=18	3+8+9=20	3+9+10=22					
3+4+6=13	3+5+7=15	3+6+8=17	3+7+9=19	3+8+10=21						
3+4+7=14	3+5+8=16	3+6+9=18	3+7+10=20							
3+4+8=15	3+5+9=17	3+6+10=19								
3+4+9=16	3+5+10=18									
3+4+10=17										
4 -										
4+5+6=15	4+6+7=17	4+7+8=19	4+8+9=21	4+9+10=23						
4+5+7=16	4+6+8=18	4+7+9=20	4+8+10=22							
4+5+8=17	4+6+9=19	4+7+10=21								
4+5+9=18	4+6+10=20									
4+5+10=19										
5 -										
5+6+7=18	5+7+8=20	5+8+9=22	5+9+10=24							
5+6+8=19	5+7+9=21	5+8+10=23								
5+6+9=20	5+7+10=22									
5+6+10=21										
6 -										
6+7+8=21	6+8+9=23	6+9+10=25								
6+7+9=22	6+8+10=24									
6+7+8=23										
7 -										
7+8+9=24	7+9+10=26									
7+8+10=25										
8 -										
8+9+10=27										

Contámos os triângulos vermelhos (são os ímpares) e deu-nos 60 triângulos.

Mariana de Jesus, Carlos Brito e Susana Horta,

EB 2,3 Dr. João Lúcio, Olhão



Vasile Karpa, Alexandre Mestre e Laura Leoni,

EB 2,3 Dr. António de Sousa Agostinho, Almancil

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 → Formar todos os números
ímpares possíveis utilizando 3
algarismos

Número Ímpar + Número Ímpar + Número Ímpar = Número Ímpar
 $\begin{array}{c} 3 \\ + \\ 5 \\ + \\ 7 \\ \hline = 15 \end{array}$

Número Par + Número Par + Número Ímpar = Número Ímpar
 $\begin{array}{c} 4 \\ + \\ 2 \\ + \\ 3 \\ \hline = 7 \end{array}$

Diagrama 1 (Ímpar): Um triângulo com vértices rotulados 'I' (Ímpar).

Diagrama 2 (Par): Um triângulo com vértices rotulados 'P' (Par) e 'I' (Ímpar).

Lista de hipóteses para o Diagrama 1 (Ímpar):

- 1 3 5
- 1 3 7
- 1 3 9
- 1 5 7
- 1 5 9
- 1 7 9
- 3 5 7
- 3 5 9
- 3 7 9
- 5 7 9

10 hipóteses

Lista de hipóteses para o Diagrama 2 (Par):

- 2 4 1
- 2 4 3
- 2 4 5
- 2 4 7
- 2 4 9
- 2 6 1
- 2 6 3
- 2 6 5
- 2 6 7
- 2 6 9
- 2 8 1
- 2 8 3
- 2 8 5
- 2 8 7
- 2 8 9
- 2 10 1
- 2 10 3
- 2 10 5
- 2 10 7
- 2 10 9
- 4 6 1
- 4 6 3
- 4 6 5
- 4 6 7
- 4 6 9
- 4 8 1
- 4 8 3
- 4 8 5
- 4 8 7
- 4 8 9

10 x 5 = 50 hipóteses

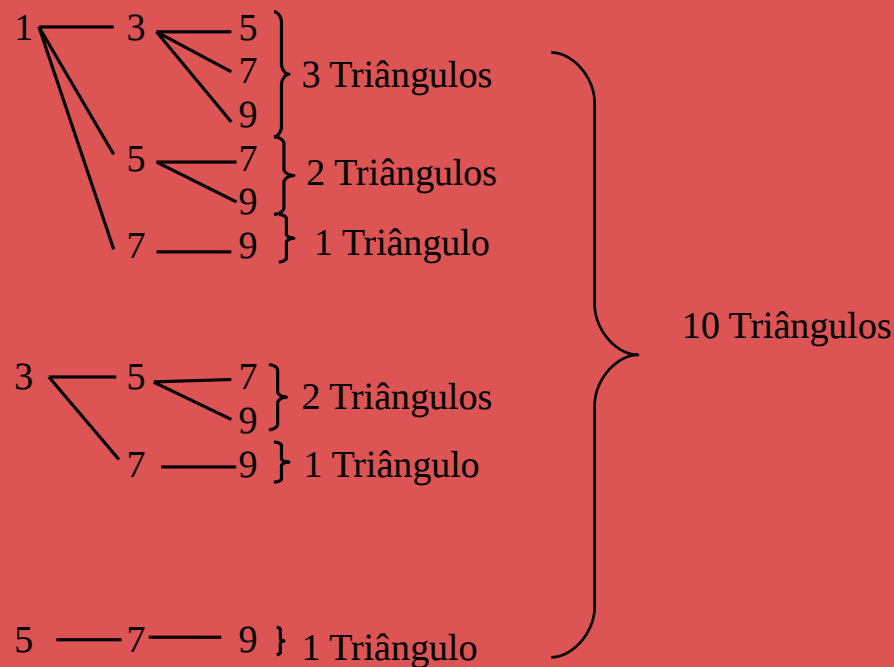
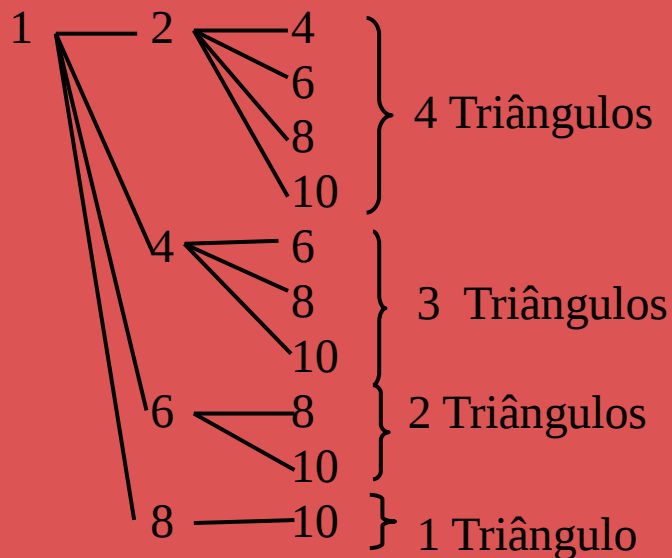
Conclusão: 10 + 50 = 60 hipóteses possíveis

60 Não é possível formar 60 hipóteses com números de 1 a 10, onde todos os números são ímpares.

Armando Carvalho e Ronaldo Sousa,

EB 2,3 Dr. João Lúcio, Olhão

Para a soma dar ímpar temos de ter 1 ímpar e 2 pares ou 3 ímpares.



Depois falta os outros números ímpares mas vai dar tudo o mesmo resultado que é 10 triângulos ou seja o 3 tem 10 triângulos o 5 tem 10 triângulos, o 7 tem 10 triângulos e o 9 tem 10 triângulos. Aqui vai dar 50 triângulos.

Somando os 50 triângulos com 2 pares e 1 ímpar mais os 10 triângulos com 3 ímpares vai dar 60 triângulos com a soma dos vértices a dar um número ímpar.